Centre Privat d'Educació Infantil, Primària i Secundària
SANT CRISTÒFOR MÀRTIR I

Plaça Ermita,1
46220 - Picassent (València)
Tel. 96 122 12 00
Cód. 46006616
www.santcristoformartir.com
scmi@planalfa.es

FUNDACIÓ
COL·LEGIS DIOCESANS
SANT VICENT MÀRTIR

MAT_2 TEMA 4: PROPORCIONALIDAD

PROPORCIONALIDAD GEOMÉTRICA

1. TEOREMA DE PITÁGORAS.

1.1.

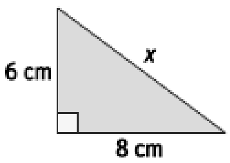
La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 15 cm, y uno de los catetos, 12 cm. ¿Cuánto mide el otro cateto?

El otro cateto mide $a=\sqrt{15^2-12^2}=\sqrt{225-144}=\sqrt{81}=9$ cm.

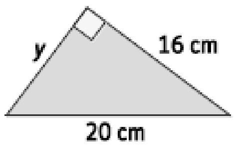
1.2.

Calcula el lado desconocido de los siguientes triángulos rectángulos.

a)



b)



a) $x=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$ cm

b) $y=\sqrt{20^2-16^2}=\sqrt{400-256}=\sqrt{144}=12$ cm

1.3.

¿Cuáles de los siguientes tríos de números son ternas pitagóricas?

A. **32, 40, 50** **B.** **12, 35, 37** **C.** **15, 20, 25** **D.** **10, 200, 41**

A. $32^2+40^2=1024+1600=2624\neq 50^2$. No es una terna pitagórica.

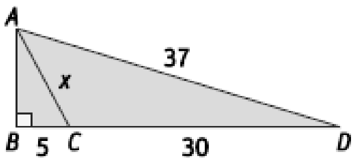
B. $12^2+35^2=144+1225=1369=37^2$. Sí es una terna pitagórica

C. $15^2+20^2=225+400=625=25^2$. Sí es una terna pitagórica

D. $10^2+41^2=100+1681=1781\neq 200^2$. No es una terna pitagórica.

1.4.

Halla la longitud del lado desconocido, *x*.



El lado $\overline{AB}$ es el cateto menor del triángulo *ABD*:

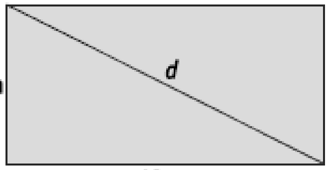
$$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{BD}^2}=\sqrt{37^2-(5+30)^2}=\sqrt{1369-1225}=\sqrt{144}=12$$

El *x* es la hipotenusa del triángulo *ABC*:

$$x=\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{144+25}=\sqrt{169}=13$$

1.5.

¿Cuánto mide la diagonal de este rectángulo?



La diagonal divide el rectángulo en dos triángulos rectángulos y coincide con la hipotenusa.

$$d=\sqrt{30^2+60^2}=\sqrt{900+3600}=\sqrt{4500}=67,08\,\text{cm}$$

1.6.

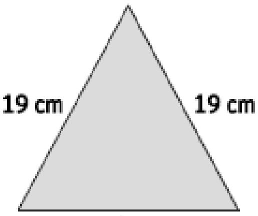
Calcula la medida de la diagonal de un cuadrado de lado 3 cm.

La diagonal divide el cuadrado en dos triángulos rectángulos iguales y coincide con la hipotenusa.

$$d=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=4,24\,\text{cm}$$

1.7.

Calcula el área del siguiente triángulo isósceles.



Para calcular el área necesitamos conocer la altura del triángulo. Por ser isósceles, la altura sobre el lado desigual lo divide en dos triángulos rectángulos iguales.

$$h=\sqrt{19^2-\left(\frac{18}{2}\right)^2}=\sqrt{19^2-9^2}=\sqrt{280}=16,73\,\text{cm}$$

Por tanto, el área del triángulo es: $A=\dfrac{18\cdot 16,73}{2}=150,57\,\text{cm}^2$.

1.8.

Calcula la altura de un triángulo equilátero de 9 cm de lado. ¿Cuánto vale su área?

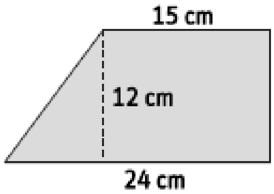
Por ser equilátero, cualquier altura lo divide en dos triángulos rectángulos iguales.

$$h=\sqrt{9^2-\left(\frac{9}{2}\right)^2}=\sqrt{9^2-4,5^2}=\sqrt{60,75}=7,79\,\text{cm}$$

El área del triángulo es: $A=\dfrac{9\cdot 7,79}{2}=35,06\,\text{cm}^2$.

1.9.

Calcula el perímetro de este trapecio.



Uno de los lados que faltan tiene igual longitud que la altura, 12 cm. El otro coincide con la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos lados miden 12 y $24-15=9$ cm. Por tanto, mide $\sqrt{9^2+12^2}=\sqrt{81+144}=15$ cm.

El perímetro del trapecio es: $P=15+12+24+15=66$ cm.

1.10.

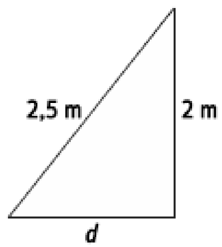
Calcula la medida de los lados iguales de un triángulo isósceles cuya altura mide 6 cm, y su base, 16 cm.

Por ser isósceles, la altura sobre el lado desigual lo divide en dos triángulos rectángulos iguales.

Por tanto, cada uno de los lados iguales mide: $\sqrt{6^2+\left(\frac{16}{2}\right)^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$ cm.

1.11.

La altura del muro del jardín de Ana es de 2 m. ¿A qué distancia del muro debe colocar una escalera de 2,5 m para que su extremo superior coincida exactamente con el punto más alto del muro?



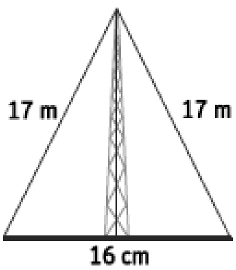
La escalera, el muro y la línea de tierra forman un triángulo rectángulo.

La distancia a la que debe colocar la escalera coincide con el cateto menor.

$d=\sqrt{2{,}5^2-2^2}=\sqrt{6{,}25-4}=1{,}5$ m

1.12.

Una antena de telefonía está sujeta al suelo con dos cables iguales de 17 m de longitud. Si los cables están fijos a la misma distancia de la antena y entre ellos distan 16 cm, ¿cuál es la altura de la antena?



Los cables y el suelo forman un triángulo isósceles, de manera que la antena lo divide en dos triángulos rectángulos iguales.

Por tanto, la antena tendrá una altura de:

$h=\sqrt{17^2-\left(\frac{16}{2}\right)^2}=\sqrt{289-64}=15$ m

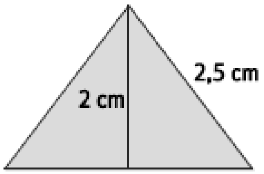
Centre Privat d'Educació Infantil, Primària i Secundària
SANT CRISTÒFOR MÀRTIR I

Plaça Ermita,1
46220 - Picassent (València)
Tel. 96 122 12 00
Cód. 46006616
www.santcristoformartir.com
scmi@planalfa.es

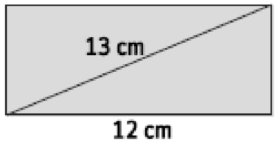
1.13.

Halla los lados desconocidos de las siguientes figuras.

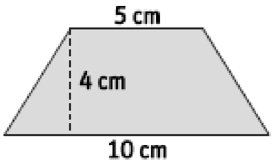
a)



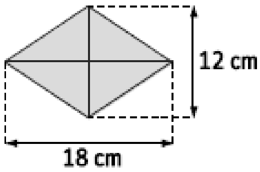
c)



b)



d)



a) Por ser un triángulo isósceles, la altura sobre el lado desigual lo divide en dos triángulos rectángulos iguales.

$$l = 2 \cdot \sqrt{2,5^2 - 2^2} = 2 \cdot \sqrt{6,25 - 4} = 2\sqrt{2,25} = 3 \text{ cm}$$

b) Como el trapecio es isósceles, los lados que faltan son iguales y coinciden con la hipotenusa del triángulo rectángulo que forma la altura.

$$l = \sqrt{4^2 + \left(\frac{10-5}{2}\right)^2} = \sqrt{16 + 6,25} = \sqrt{22,25} = 4,72 \text{ cm}$$

c) La diagonal divide el rectángulo en dos triángulos rectángulos iguales cuyo cateto menor coincide con el lado del rectángulo.

$$l = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

d) Las diagonales dividen el rombo en cuatro triángulos rectángulos iguales cuya hipotenusa coincide con el lado.

$$l = \sqrt{\left(\frac{12}{2}\right)^2 + \left(\frac{18}{2}\right)^2} = \sqrt{36 + 81} = \sqrt{117} = 10,82 \text{ cm}$$

1.14.

En un triángulo rectángulo isósceles, la medida de cada uno de los dos catetos iguales es de 20 cm.

a) Calcula la medida de la hipotenusa.

b) Calcula el valor del perímetro.

c) Calcula la medida de la altura sobre la hipotenusa.

a) El valor de la hipotenusa es $h = \sqrt{20^2 + 20^2} = 20 \cdot \sqrt{2} = 28,28$ cm .

b) El perímetro será: $P = 20 + 20 + 28,28 = 68,28$ cm .

c) Como es isósceles, la altura sobre la hipotenusa lo divide en dos triángulos rectángulos iguales.

$$h = \sqrt{20^2 - \left(\frac{20 \cdot \sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{400 - 200} = \sqrt{200} = 10 \cdot \sqrt{2} = 14,14 \text{ cm}$$

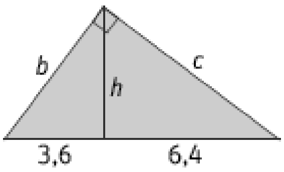
2. TEOREMA DE PITÁGORAS, TEOREMA DEL CATETO Y TEOREMA DE LA ALTURA.

(Puedes resolver los problemas sabiendo sólo el teorema de pitágoras y el teorema del cateto)

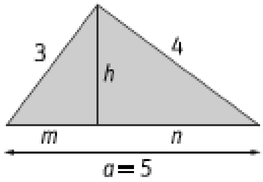
2.1.

Aplica primero el teorema del cateto y luego el de la altura para calcular las medidas desconocidas en cada caso.

a)



b)



a) Aplicamos el teorema del cateto: $b^2 = 3,6 \cdot (3,6 + 6,4) = 36 \Rightarrow b = \sqrt{36} = 6$

$$c^2 = 6,4 \cdot (3,6 + 6,4) = 64 \Rightarrow c = \sqrt{64} = 8$$

Por el teorema de la altura: $h^2 = 3,6 \cdot 6,4 = 23,04 \Rightarrow h = \sqrt{23,04} = 4,8$

b) Si aplicamos el teorema del cateto: $3^2 = m \cdot 5 \Rightarrow m = \dfrac{9}{5} = 1,8$

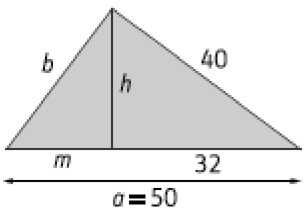
$$4^2 = n \cdot 5 \Rightarrow n = \frac{16}{5} = 3,2$$

Mediante el teorema de la altura: $h^2 = 1,8 \cdot 3,2 = 5,76 \Rightarrow h = \sqrt{5,76} = 2,4$

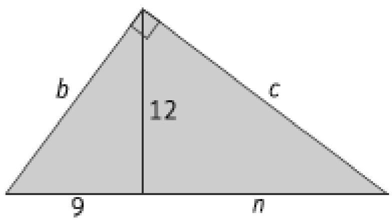
2.2.

Aplica los teoremas de la altura y del cateto y halla las medidas desconocidas en ambos casos.

a)



b)



a) Aplicamos el teorema del cateto: $b^2 = (50 - 32) \cdot 50 = 900 \Rightarrow b = \sqrt{900} = 30$

Por el teorema de la altura: $h^2 = 3,6 \cdot 6,4 = 23,04 \Rightarrow h = \sqrt{23,04} = 4,8$

b) Mediante el teorema de la altura: $12^2 = 9 \cdot n \Rightarrow n = \dfrac{144}{9} = 16$

Aplicamos el teorema del cateto: $b^2 = 9 \cdot (9 + 16) = 225 \Rightarrow b = \sqrt{225} = 15$

$$c^2 = 16 \cdot (9 + 16) = 400 \Rightarrow c = \sqrt{400} = 20$$

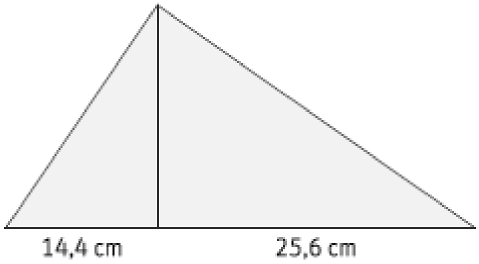
Centre Privat d'Educació Infantil, Primària i Secundària
SANT CRISTÒFOR MÀRTIR I

Plaça Ermita,1
46220 - Picassent (València)
Tel. 96 122 12 00
Cód. 46006616
www.santcristoformartir.com
scmi@planalfa.es

2.3.

En un triángulo rectángulo la hipotenusa queda dividida en dos segmentos de 14,4 cm y 25,6 cm al trazar la altura sobre la hipotenusa.

a) Dibuja en tu cuaderno el triángulo con sus medidas correspondientes.



a) Calcula la medida de la altura sobre la hipotenusa y el valor de los catetos.

Aplicamos el teorema de la altura: $h^2 = 14,4 \cdot 25,6 = 368,64 \Rightarrow h = \sqrt{368,64} = 19,2$

Por el teorema del cateto: $b^2 = 14,4 \cdot (14,4 + 25,6) = 576 \Rightarrow b = \sqrt{576} = 24$

$$c^2 = 25,6 \cdot (14,4 + 25,6) = 1024 \Rightarrow c = \sqrt{1024} = 32$$

Centre Privat d'Educació Infantil, Primària i Secundària
SANT CRISTÒFOR MÀRTIR I
Plaça Ermita,1
46220 - Picassent (València)
Tel. 96 122 12 00
Cód. 46006616
www.santcristoformartir.com
scmi@planalfa.es

3. SEMEJANZA.

3.1.

Se ha ampliado una fotografía que medía 10 cm × 15 cm a 16 cm × 24 cm. ¿Cuál es la razón de semejanza aplicada en la ampliación?

Su razón de semejanza es: $k = \frac{16}{10} = \frac{24}{15} = 1{,}6$

3.2.

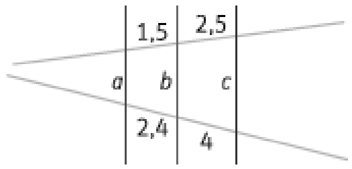
Las medidas de un rectángulo son 5 y 10 cm. Calcula las medidas de otro rectángulo semejante al anterior si su lado mayor mide 5 cm.

Calculamos la razón de semejanza: $k = \frac{10}{5} = 2$

El otro lado del segundo rectángulo mide: $\frac{5}{2} = 2{,}5$ cm

3.3.

Las rectas *a* y *b* del dibujo son paralelas. Comprueba utilizando el teorema de Tales si también lo es la recta *c*.

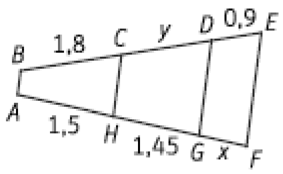


$\frac{1{,}5}{2{,}4} = \frac{2{,}5}{4} = 0{,}625 \Rightarrow$ *c* también es paralela a *a* y *b*.

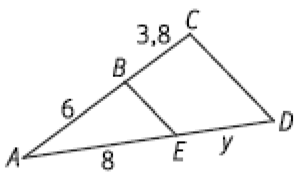
3.4.

Calcula la longitud de los segmentos desconocidos.

a)



b)



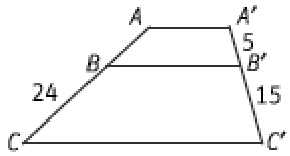
a) $\frac{1{,}8}{1{,}5} = \frac{y}{1{,}45} = \frac{0{,}9}{x} \Rightarrow x = \frac{1{,}5 \cdot 0{,}9}{1{,}8} = 0{,}75$ e $y = \frac{1{,}45 \cdot 1{,}8}{1{,}5} = 1{,}74$

b) $\frac{6}{8} = \frac{3{,}8}{y} \Rightarrow y = 5{,}07$

3.5.

Calcula la longitud del segmento *AC* de la figura.

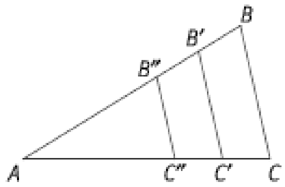
Compara tu respuesta con un compañero, ¿habéis seguido los mismos pasos?



$\frac{24}{15} = \frac{AC}{5+15} \Rightarrow AC = \frac{24 \cdot 20}{15} = 32$

3.6.

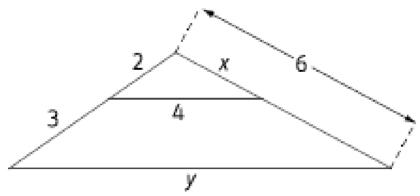
Explica por qué los triángulos que aparecen en la siguiente figura son triángulos en posición de Tales.



Los triángulos *ABC*, *AB'C'* y *AB"C"* están en posición de Tales porque tienen un vértice común, *A*, y los lados *BC*, *B'C'* y *B"C"* opuestos son paralelos.

3.7.

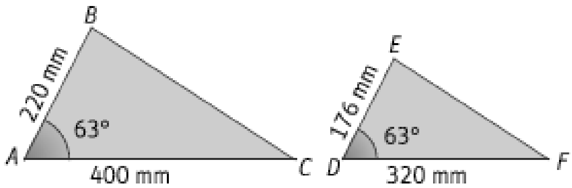
Calcula la longitud de los lados desconocidos *x* e *y* del siguiente triángulo.



$$\frac{6}{x}=\frac{2+3}{2}=\frac{y}{4} \Rightarrow x=\frac{2\cdot 6}{5}=2{,}4 \qquad y=\frac{4\cdot 5}{2}=10$$

3.8.

Comprueba, aplicando los criterios de semejanza, si los siguientes triángulos son semejantes.

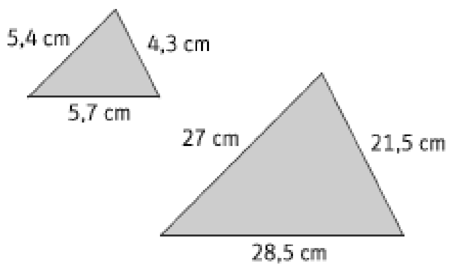


Aplicamos el 2.° criterio de semejanza: $\widehat{A}=\widehat{D}=25°$ y $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}\Rightarrow\frac{220}{176}=\frac{400}{320}=1{,}25$

Por tanto, los dos triángulos son semejantes.

3.9.

Comprueba si estos triángulos son semejantes.



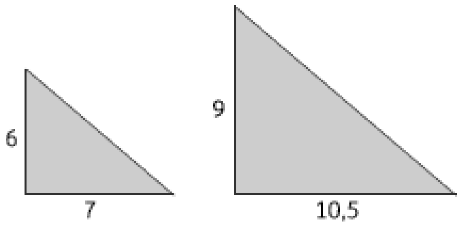
Aplicamos el 3.^{er} criterio de semejanza: $\frac{5{,}4}{27}=\frac{4{,}3}{21{,}5}=\frac{5{,}7}{28{,}5}=0{,}2$

Por tanto, los dos triángulos son semejantes.

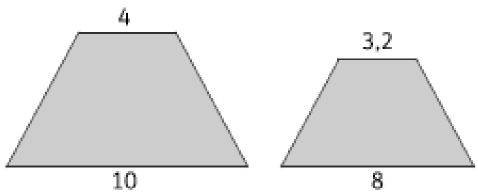
3.10.

Comprueba si las siguientes figuras son semejantes entre sí. Justifica tu respuesta en cada caso.

a)



b)



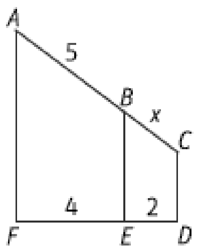
a) $\frac{9}{6}=\frac{10,5}{7}=1,5$. Sí es semejante, ya que sus ángulos correspondientes son iguales, y sus lados, proporcionales.

b) $\frac{4}{3,2}=\frac{10}{8}=1,25$. Sí es semejante, ya que sus ángulos correspondientes son iguales, y sus lados, proporcionales.

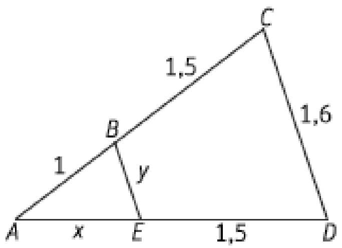
3.11.

Calcula el valor de los segmentos desconocidos en cada una de las siguientes representaciones.

a)



b)



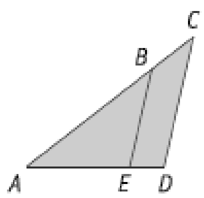
a) $\frac{5}{4}=\frac{x}{2}\Rightarrow x=\frac{5\cdot 2}{4}=2,5$

b) $\frac{1}{x}=\frac{1,5}{1,5}\Rightarrow x=1 \qquad \frac{1+1,5}{1,6}=\frac{1}{y}\Rightarrow y=\frac{1,6}{2,5}=0,64$

3.12.

En la figura, los lados *CD* y *BE* son paralelos. Se sabe que:

$AB = 3$ $\quad AE = 2$ $\quad BC = 1$ $\quad BE = 2$



a) ¿Cómo son los triángulos *ABE* y *ACD*?

b) Calcula las medidas de los segmentos *AD*, *ED* y *CD*.

c) ¿Cuál es la razón de semejanza?

a) Como los lados CD y BE son paralelos, los triángulos tienen dos ángulos iguales, por tanto, por el 1.^{er} criterio de semejanza, son triángulos semejantes.

b) $\frac{3}{2}=\frac{3+1}{AD}\Rightarrow AD=\frac{4\cdot 2}{3}=2,\widehat{6} \qquad \frac{3}{2}=\frac{1}{ED}\Rightarrow ED=\frac{2}{3}=0,\widehat{6} \qquad \frac{3}{2}=\frac{4}{CD}\Rightarrow CD=2,\widehat{6}$

c) $k=\frac{3}{4}=0,75$

Centre Privat d'Educació Infantil, Primària i Secundària
SANT CRISTÒFOR MÀRTIR I

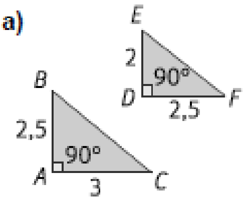
Plaça Ermita,1
46220 - Picassent (València)
Tel. 96 122 12 00
Cód. 46006616
www.santcristoformartir.com
scmi@planalfa.es

FUNDACIÓ COL·LEGIS DIOCESANS SANT VICENT MÀRTIR

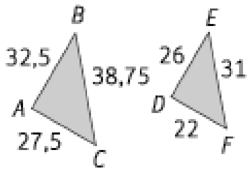
3.13.

Estudia si los siguientes pares de triángulos son o no semejantes.

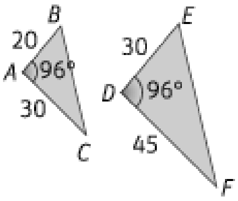
a)



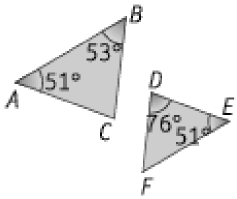
c)



b)



d)



a) $\frac{2,5}{2}=1,25\neq\frac{3}{2,5}=1,2$. Aunque tienen un ángulo correspondiente igual, los lados que lo forman no son proporcionales, por tanto, por el 2.º criterio de semejanza, no son triángulos semejantes.

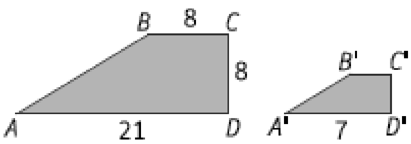
b) $\frac{20}{30}=\frac{30}{45}=0,\hat{6}$. Tienen un ángulo correspondiente igual y los lados que lo forman son proporcionales, por tanto, por el 2.º criterio de semejanza, son triángulos semejantes.

c) $\frac{32,5}{26}=\frac{38,75}{31}=\frac{27,5}{22}=1,25$. Como todos los lados son proporcionales, por el 3.er criterio de semejanza, son triángulos semejantes.

d) Calculamos el ángulo que falta en el triángulo *ABC*: $180-(51+53)=76°$. Como tienen tres ángulos iguales, son triángulos semejantes.

3.14.

Las siguientes figuras son semejantes.



a) Halla la medida del lado *AB*.

b) Calcula la medida de los lados *A'B'*, *B'C'* y *C'D'*.

a) Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$AB=\sqrt{(21-8)^2+8^2}=\sqrt{13^2+8^2}=\sqrt{233}=15,26.$$

b) Calculamos la razón de semejanza: $k=\frac{A'D'}{AD}=\frac{7}{21}=\frac{1}{3}$

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'B'}{15,26}=\frac{1}{3}\Rightarrow A'B'=5,09$$

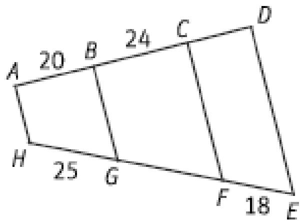
$$\frac{B'C'}{BC}=\frac{B'C'}{8}=\frac{1}{3}\Rightarrow B'C'=2,67$$

$$\frac{C'D'}{CD}=\frac{C'D'}{8}=\frac{1}{3}\Rightarrow C'D'=2,67$$

Centre Privat d'Educació Infantil, Primària i Secundària
SANT CRISTÒFOR MÀRTIR I
Plaça Ermita,1
46220 - Picassent (València)
Tel. 96 122 12 00
Cód. 46006616
www.santcristoformartir.com
scmi@planalfa.es

3.15.

Observa la siguiente figura y calcula *GF* y *CD*.



$\frac{AB}{HG} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$ $\frac{24}{GF} = \frac{4}{5} \Rightarrow GF = 30$ $\frac{CD}{18} = \frac{4}{5} \Rightarrow CD = 14,4$

3.16.

Comprueba, si las siguientes parejas de triángulos son o no semejantes.

a) Uno de lados 12, 9 y 4 y el otro, 12, 27 y 36

b) Uno con ángulos 43° y 67°, y el otro, 70° y 67°

a) $\frac{12}{4} = \frac{27}{9} = \frac{36}{12} = 3$. Son semejantes.

b) El ángulo que falta en el primer triángulo mide: $180^o - (43^o + 67^o) = 110^o$.

El ángulo que falta en el segundo triángulo mide: $180^o - (70^o + 67^o) = 43^o$.

Son semejantes.

3.17.

La sombra de una casa de 21 m de altura es de 28 m. ¿Qué sombra proyectará en ese momento un árbol de 3 m de alto?

Los triángulos que forman la casa y su sombra y el árbol y su correspondiente sombra son semejantes. Por tanto:

$\frac{21}{28} = \frac{3}{h} \Rightarrow h = \frac{3 \cdot 28}{21} = 4 \text{ m}$